b) * pour n=0 $a_0 - b_0 = a - b \le \frac{a-b}{2^0}$ (vrai)

* supposons que : $a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n}$ et montrons que : $a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{a-b}{2^{n+1}}$

on a : $a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{a_n - b_n}{2}$ or $a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n}$ d'où $a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{a-b}{2^{n+1}}$

conclusion : $a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

* $b_n \le a_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

4) * (b_n) est croissante et (a_n) décroissante

* $0 \le a_n - b_n \le (\frac{1}{2})^n.(a-b)$ *or* $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n.(a-b) = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$

d'où (a_n) et (b_n) sont adjacentes par suite, elles convergent vers la meme limite α

5) (a_n) est décroissante $\Rightarrow a_n \le a_0 \Rightarrow a_n \le a$;$\forall n \in \mathbb{N}$

on a : $b_n \le a_n$ d'où $b_n \le a$

(b_n) est croissante et majorée par a et (b_n) converge vers α $\Rightarrow$ *alors* $b_n \le \alpha$;$\forall n \in \mathbb{N}$

de meme : $a_n \ge \alpha$; $\forall n \in \mathbb{N}$ d'où $b_n \le \alpha \le a_n$;$\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n - b_n \le \frac{a-b}{2^n} \Rightarrow 0 \le a_n - \alpha \le \frac{a-b}{2^n}$

pour a=2 et b=1 $0 \le a_n - \alpha \le \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n} \le 10^{-10} \Leftrightarrow 2^n \ge 10^{10}$

on a : $2^{40} \ge 10^{10}$ ← (*calculatrice*) d'où $\alpha \simeq a_{40}$ (à calculer)

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn